e^ix = cos(x) + isin(x).

Esta es la fórmula de Euler, y nos dice que e^ix, la exponencial imaginaria, es un número complejo de parte real cos(x) y parte imaginaria sin(x). Este número tiene módulo 1, por lo que se encuentra en la circunferencia unitaria, y además su ángulo es x.

Pero, ¿por qué esta fórmula es cierta? ¿Qué significa elevar a un exponente imaginario, y por qué todo esto tiene sentido?

La demostración más conocida de la fórmula de Euler, usa algo llamado “series de Taylor”. Pero esta demostración es algo complicada, poco intuitiva, y no aclara mucho por qué la fórmula tiene sentido.

Este video va a ser diferente. Voy a dar dos explicaciones de por qué la fórmula de Euler es cierta: una desde el punto de vista de la exponencial compleja, y otra desde el punto de vista de la función cos(x) + isin(x). A través de estas explicaciones vamos a entender la profunda conexión entre las exponenciales y las funciones trigonométricas.

Sin más que agregar, les presento: la fórmula de Euler.

---

Las exponenciales se pueden definir mediante esta expresión: e^x es “el límite de (1 + x/n), todo a la n, cuando n tiende a infinito”.

Esto representa un número muy cercano a 1, multiplicado por sí mismo muchas veces hasta obtener un número diferente.

Aquí puedes ingresar cualquier número real x y obtener un valor. Si x es positivo, el valor se aleja del origen, siendo mayor que 1. Pero si x es negativo, el valor se acerca al origen y está entre 0 y 1. Así funciona la exponencial real.

Pero, ¿por qué conformarnos solo con los reales? Esta expresión también da para ingresar números complejos, y sigue representando un número muy cercano a 1, elevado a un número muy grande, pero esta vez el resultado es complejo:

Así, podemos definir la exponencial para exponentes complejos: la exponencial compleja. Lo mejor de todo, es que se conservan casi todas las propiedades que tenía la exponencial real.

Un número z se puede escribir como a + bi, donde a es su parte real y b su parte imaginaria. Entonces e^z = e^(a+bi), que por propiedades es igual a (e^a)(e^bi). e^z es la exponencial compleja. e^a es la exponencial real, y ya sabemos cómo funciona. Lo realmente interesante es e^bi, la exponencial imaginaria. ¿Qué pasa cuando elevamos e a un número imaginario ix?

Primero analicemos (1 + ix/n), un número muy cercano a 1, en este caso con un pequeño desplazamiento hacia arriba. Al multiplicarlo por sí mismo, su módulo se multiplica con su módulo y su ángulo se suma con su ángulo. Si repites esto n veces, el resultado va rotando alrededor del origen.

El módulo de (1 + ix/n)^n es cercano a 1, y se puede demostrar que en el límite, cuando n tiende a infinito, el módulo final tiende a 1.

Así que e^ix representa una rotación alrededor del origen, sin alejarse ni acercarse a este. En el camino, recorre un arco de circunferencia. ¿Cuánto mide este arco?

Fíjate que la distancia entre 1 y 1 + ix/n es este segmento de largo x/n. Ahora, si el módulo de todas estas potencias es 1, ninguna de estas distancias entre potencias cambia su largo, así que todas miden x/n. La longitud del arco es la suma de estos n segmentos, que es exactamente x.

Si el arco mide x y el radio es 1, ¿cuánto mide el ángulo final? Si estás usando radianes, el ángulo también es x, por lo que e^ix es un número de módulo 1 y ángulo x radianes. En su forma polar, e^ix sería entonces igual a cos(x) + isin(x).

Esta es la fórmula de Euler.

---

Mientras la exponencial real e^a nos aleja o acerca al origen, la exponencial imaginaria e^bi nos hace rotar alrededor del origen en un ángulo de b radianes, siendo igual a cos(b) + isin(b). Por ende, una exponencial compleja e^(a+bi) combina ambas acciones: rotar alrededor del origen, y a la vez alejarse o acercarse a este.

**La función cis y la exponencial**

El número cos(x) + isin(x) es un número cuyo módulo es 1, es decir, se encuentra en la circunferencia de radio 1 centrada en el origen. Además, su ángulo es precisamente x. Este número, cos(x) + isin(x), se abrevia cis(x).

Entonces, si tenemos dos números cis(x) y cis(y), y los multiplicamos, sus módulos se multiplican y sus ángulos se suman. Así, el producto tiene módulo 1\*1, que es 1, y ángulo x+y. Este nuevo número se puede expresar como cis(x+y). Esto significa que cis(x)\*cis(y) = cis(x+y).

Esta es una propiedad muy interesante, y nos dice que “Multiplicar números complejos implica sumar sus ángulos”. Piensa bien en esta frase. Multiplicar dos cosas conlleva la suma de algo. ¿Te suena familiar?

Pues se parece mucho a cómo funcionan las potencias: “multiplicar potencias de la misma base implica sumar sus exponentes”. b^x \* b^y = b^(x+y). La forma en que funcionan los ángulos de los números complejos, es muy parecida a cómo funcionan los exponentes de las potencias.

Pero además, si evalúas la función cis en 0, como cis es igual a coseno + iseno, cos(0) = 1, y sin(0) = 0, así que cis(0) = 1. En comparación, un número b cualquiera, elevado a 0, también da 1. Otro punto en común. Y es que, a partir de estas dos propiedades se pueden deducir varias más, como por ejemplo: 1/cis(x) = cis(-x), cis(x)/cis(y) = cis(x-y), y el importante teorema de de Moivre, cis(x)^n = cis(nx), donde n es un número entero. **Todas** estas propiedades son exactamente las mismas que tienen las potencias. Entonces podemos intentar expresar la función cis(x) como una potencia b^(kx). En esta potencia, el exponente kx de alguna forma nos entrega información sobre el ángulo de un complejo.

Ahora, esta idea puede parecer extraña al inicio, así que voy a mostrar un ejemplo para acomodarnos con esta idea.

Piensa en el número i, que representa una rotación en 90°. i², que es multiplicar dos veces por i, es rotar dos veces en 90°, o sea 180°, que corresponde a -1. i³ son 3 rotaciones en 90°, i⁴ son 4 rotaciones, y así. En general, i^n representa rotar n veces en 90° en sentido antihorario, con el detalle de que si n es negativo, significa rotar en el sentido opuesto, en sentido horario. El exponente n te dice **cuántas** rotaciones hacer, así que de cierta forma te da **información sobre el ángulo que va a tener el resultado final**. Para llevar más lejos esto, si rotas 3 veces y luego otras 2, es lo mismo que rotar 5 veces en total. Esto se puede representar como tomar i³ y multiplicarlo por i², y por reglas de potencias se suman los exponentes, 2 y 3, para dar como resultado i⁵. O sea, los exponentes que de cierta forma representan ángulos, se **suman**, dando como resultado i elevado a la **suma** de esos ángulos.

Así que realmente no es tan loco colocar el ángulo de un número complejo como el exponente de una potencia, y no es tan raro decir que la función cis puede ser igual a cierta potencia b^kx. Pero, ¿a cuál potencia?

Podríamos tratar de igualarla a una potencia de base i. cis(x) igual a i^kx. Trabajando en radianes, cuando x = pi/2, tenemos i^kpi/2 que debería ser igual a i, o i¹. Por ende, k debe ser igual a 1 / (pi/2). Así que cis(x) sería igual a i^[x/(pi/2)], y tendría sentido. cis(pi/2) sería igual a i¹, cis(pi) sería igual a i² que sería -1, y así. Todo bien hasta ahora, ¿pero qué pasaría con cis(pi/4)? Por un lado, cis(pi/4) sería igual a raíz(2)/2 + raíz(2)/2 \* i. pero por el otro lado nos quedaría i^(1/2), o sea, la raíz de i. Y existen 2 números que al cuadrado dan i. Por un lado, si i representa rotar en 90° o pi/2 radianes, puedes pensar que la raíz de i es solo rotar en 45°, o pi/4 radianes, o sea multiplicar por cis(pi/4), que es el número de antes. Pero por otro lado, puedes pensar en i como rotar 270° **en el sentido opuesto**, o sea en sentido horario, y en ese caso la mitad de eso es rotar 135° en sentido horario, o 3Pi/4 radianes, que corresponde a multiplicar por cis(-3pi/4), que en este caso resulta ser el número opuesto a cis(pi/4). Ambos números al cuadrado dan como resultado i.

Entonces, no puedes llegar e igualar cis(pi/4) a i ^ (½), porque elevar a ½ trae problemas. En general, solo puedes elevar el número i a números enteros sin tener conflictos. Si intentas elevarlo a cualquier otro número no entero, vas a obtener múltiples resultados distintos.

Y eso es complicado, porque el argumento de la función cis puede tomar cualquier valor en un continuo y así abarcar todos los infinitos puntos de la circunferencia unitaria. Si el exponente de la potencia de i está limitado a solo tomar valores discretos, y la potencia solo es capaz de abarcar unos pocos puntos de esta circunferencia, no puedes llegar e igualar la función cis a una potencia de i. Y esto no solo ocurre con el número i, sino con casi todos los números complejos: si se elevan a un valor no entero, hay múltiples resultados. Por ende, no puedes llegar e igualar la función cis a una potencia de un número complejo de esta circunferencia.

¿Significa eso que todo está perdido y no hay nada que hacer? Pues resulta que todavía nos queda una estrategia.

Si bien las potencias de i no pueden abarcar todos los puntos de la circunferencia unitaria, sí pueden abarcar 4 puntos distintos: 1, i, -1 y -i. Eso es porque i forma un ángulo de 90°, y como la circunferencia completa son 360°, 360 / 90 = 4. Por ende, sus potencias abarcan 4 puntos. Eso es muy poco. Ojalá pudiéramos abarcar más que solo 4 puntos. ¿Hay alguna forma de hacer eso? Y la respuesta es sí, puedes hacer eso si tomas un número que tenga un ángulo más pequeño, como por ejemplo, un ángulo de 45° o pi/4 radianes. Este número sería cis(pi/4), que ya dijimos que era raíz(2)/2 + raíz(2)/2 \* i. Como 360 / 45 = 8, las potencias de este número pueden abarcar 8 puntos de esta circunferencia: más que los 4 puntos que teníamos antes.

Ahora, la idea es tener la mayor cantidad posible de puntos, así que podemos ir achicando cada vez más el ángulo de nuestro número. La idea es que si tienes un número en esta circunferencia con un ángulo infinitamente pequeño, sus potencias cubrirían una cantidad infinitamente grande de puntos, y eso es justo lo que queremos.

Entonces, el número que necesitamos es cis de un ángulo infinitamente pequeño que llamaremos omega. Aquí entramos en lo que es cálculo infinitesimal, porque estamos pensando en qué valor va tomando cis(omega) cuando omega es un infinitesimal, un valor infinitamente pequeño. Como cis es coseno más iseno, podemos hacer algunas aproximaciones. Por ejemplo, si miramos muy cerca, nos daremos cuenta que el seno de omega, un ángulo muy pequeño, mide casi lo mismo que el arco abarcado por omega. Si nuestros ángulos están en radianes, ese arco mide exactamente omega. Así que podemos hacer la aproximación “sen(omega) aproximadamente igual a omega” cuando omega es un ángulo muy pequeño, y esto se hace más exacto a medida que omega sea más pequeño. Esto equivale a un límite bastante conocido: el límite, cuando omega tiende a 0, de sen(omega) / omega, es 1. Por otra parte, el coseno de un ángulo muy pequeño es prácticamente igual a 1. Así, cis(omega), que no es nada más que cos(omega) + isen(omega), es aproximadamente igual a 1 + i\*omega, cuando omega es un ángulo muy pequeño.

Con eso en mente, para obtener cualquier número en esta circunferencia, solo hay que elevar nuestro cis(omega) a un número entero lo suficientemente grande.

Si lo elevamos a un entero n, el resultado es un número de ángulo n\*omega. Si queremos obtener un ángulo en especial, digamos “x”, tenemos que escoger nuestros valores de n y de omega, de manera que n\*omega = x. Una manera sería despejar n y obtener que debe ser igual a x / omega. Entonces nuestro cis(omega) lo elevamos a x/omega, y en teoría obtenemos cis((x/omega) \* omega), o sea cis(x). Pero recordemos que esto solo funciona si nuestro exponente es un número entero, y como x y omega son números reales, no podemos asegurar que esta fracción dé un entero. Así que es complicado llegar e intentar despejar n de esta relación. En vez de eso, una mejor idea sería despejar omega, y obtener que debe ser igual a x/n, donde exigimos que n sea un entero. Ahora, en vez de tener un ángulo omega cualquiera, tenemos un ángulo x/n, la eneava parte de cierto ángulo x, donde n es un número entero muy grande. Si elevamos este cis(x/n) a n, terminamos recuperando nuestro cis(x) original. Ahora, si n tiende a infinito, el ángulo x/n tiende a 0, así que podemos hacer nuestras aproximaciones: sin(x/n) = x/n, y cos(x/n) = 1, y así decimos que cis(x/n) es aproximadamente igual a 1 + ix/n. Entonces, al elevar ambos lados a n, parece lógico que cis(x) sea aproximadamente igual a (1 + ix/n)^n, donde n tiende a infinito.

Ahora, ojo, todo este raciocinio es bien informal. Realmente nunca hemos demostrado formalmente que esto sea así, pero por ahora solo quiero que entiendas el concepto de manera intuitiva, dejando las formalidades de lado. Solo diré que esta relación sí se puede demostrar: efectivamente, cis(x) es igual al límite de esta expresión, cuando n tiende a infinito. Pero prefiero dejar las demostraciones para otro video. Ahora fíjate muy bien en esta expresión, porque es muy especial. ¿Te parece familiar?